Folio-Kapsel: „Technische Hochschule, Stuttgart, Schriften", am Schluß des Faches der Wirt. Gesch.

Einladungs-Schrift

der

Königl. Polytechnischen Schule in Stuttgart

zu der

Feier des Geburtsfestes

Seiner Majestät des Königs

Wilhelm von Württemberg

auf den 27. September 1861.

Mit einer Abhandlung

über

die Theorie der Erscheinungen der Capillarität

von

Professor Dr. Karl Holtzmann.

Stuttgart.

Druck der J. B. Metzlerschen Buchdruckerei.

1861.

14

Ueber die Theorie der Erscheinungen der Capillarität.

1. Eine schwere Flüssigkeit hat im Zustande der Ruhe eine horizontale freie Oberfläche, wenn diese Oberfläche hinreichend weit von den begrenzenden Flächen der Wände des Gefässes, das die Flüssigkeit enthält, entfernt ist. Beobachtet man aber diese Oberfläche in der Nähe der begrenzenden Wand, so sieht man, dass die freie Oberfläche zunächst bei dieser entweder in einer concaven Fläche an der Wand ansteigt, oder mit convexer Fläche abwärts geht, und nur in den seltensten Fällen, vielleicht nie bis an die Wand eben bleibt. Noch auffallender tritt diese Erscheinung auf, wenn man die Flüssigkeit in einem weiten Gefässe mit derselben Flüssigkeit in einem sehr engen Gefässe, etwa einem sehr engen Röhrchen, einem Haarröhrchen, communiciren lässt. Statt wie diess nach den Gesetzen der Hydrostatik bei alleiniger Wirkung der Schwere folgt, in beiden Gefässen durch eine Horizontalebene begrenzt zu sein, steht die Flüssigkeit in dem Haarröhrchen entweder höher oder tiefer als in dem weiteren Gefässe, und die Oberfläche der Flüssigkeit ist dabei in dem engen Röhrchen im ersten Falle concav, im zweiten convex nach oben. Diese und verwandte Erscheinungen nennt man die Erscheinungen der Capillarität, und zwar spricht man von einer Capillarerhebung oder von einer Capillardepression, je nachdem die Flüssigkeit in dem engen Röhrchen höher oder niederer steht als in dem mit der Röhre verbundenen weiteren Gefässe.

2. Von einer Flüssigkeit mit vollkommener Beweglichkeit ihrer Theile lehrt die Hydrostatik, dass die freie Oberfläche in der Ruhe rechtwinklich stehen müsse auf der Richtung der Kraft, welche auf die Theilchen der Flüssigkeit in der Oberfläche einwirkt. Ist diese nur die Schwerkraft, so muss also diese Oberfläche horizontal sein. Diess ist aber bei den Flüssigkeiten in der Nähe der begrenzenden Wand nicht der Fall, dort ist die Oberfläche gekrümmt, entweder gegen die Wand ansteigend, concav nach oben, oder von der Wand abgekehrt, convex nach oben. Es muss also hier noch eine weitere Kraft neben der Schwere auftreten; der nächste Gedanke ist, eine anziehende Kraft der Wand auf die Flüssigkeit im ersten, eine abstossende Kraft im zweiten Falle anzunehmen. Dass eine solche Attraction zwischen der Materie der Wand und den Flüssigkeiten stattfindet, weiss man aus den Versuchen mit Adhäsionsplatten, welche man von den Flüssigkeiten, mit welchen sie in Berührung stehen, abzureissen sucht. Man weiss, dass hierzu eine ziemlich grosse, messbare Kraft erforderlich ist, man hat aber auch bei Glas und Quecksilber und andern Platten und Flüssigkeiten, bei welchen eine Capillardepression und keine Erhebung eintritt, immer eine Anziehung, niemals eine Abstossung bei den Versuchen mit Adhäsionsplatten gefunden. Nur zeigt sich ein Unterschied: bei den Platten, an welchen die betrachtete Flüssigkeit Capillaransteigung zeigt, ist bei dem Versuche über die Adhäsion die Platte nach dem Abreissen noch benetzt, mit einer Flüssigkeitsschichte überzogen, bei den Platten aber, an welchen

diese Flüssigkeit Depression zeigt, ist die Platte nach dem Abreissen nicht benetzt, sie ist nach dem Abreissen trocken. Bei den ersten Platten wird daher nicht die Platte von der Flüssigkeit, sondern diese von sich selbst abgerissen, es muss also auch eine Attraction der Flüssigkeitstheilchen auf sich selbst stattfinden, eine Cohäsion der Flüssigkeit; diese Cohäsion der Flüssigkeit ist aber bei den ersten Platten kleiner als die Adhäsion der Flüssigkeit an die Platte, bei den zweiten dagegen grösser. Dort trennt sich daher die Flüssigkeit leichter von sich selbst als von der Platte, hier trennt sich die Flüssigkeit leichter von der Platte als von sich selbst.

3. Die Versuche über die Adhäsion haben ferner gelehrt, dass die Anziehung zwischen einer Platte und einer Flüssigkeit durchaus nicht bemerkt wird, so lange der Abstand der Platte von der Flüssigkeit, wenn auch noch so klein, merklich und messbar ist. Man sagt daher, die Anziehung zwischen einem festen und einem flüssigen Körper finde nur in unmessbar kleiner Entfernung statt, vielleicht auch nur bei unmittelbarer Berührung. Dasselbe findet bei der Attraction der Flüssigkeiten auf sich selbst statt; Hagen hat noch neuerlich gezeigt, dass zwei Wassertropfen nicht zusammenfliessen, so lange nur ein Lichtstrahl zwischen ihnen durch gehen kann.

4. Diese beiden Kräfte, die Anziehung der Wand auf die zunächst liegende Flüssigkeitsschichte, und die Anziehung der Flüssigkeitstheilchen auf einander, sind es, welche die Erscheinungen der Capillarität hervorrufen.

Betrachtet man ein Element der Flüssigkeit, das in der gekrümmten Oberfläche liegt, aber in messbarer Entfernung von der nächsten Wandfläche, auf das also die Anziehung der Wandfläche nicht mehr unmittelbar einwirkt, so wirken auf dieses Element, dessen Masse mit m bezeichnet werden soll, die Schwerkraft vertical abwärts mit der Grösse mg, wenn g wie gewöhnlich die Beschleunigung der Schwere bezeichnet; dann die Attraction der Flüssigkeit, welche, da nur die Theile eine merkbare Wirkung hervorbringen, welche von m in unmessbar kleiner Entfernung wegliegen, und weil um die Normale durch m zur Oberfläche der Flüssigkeit in unmessbar kleiner Entfernung von m die Flüssigkeit symmetrisch angeordnet ist, nach der Richtung der Normalen geht; ihre Grösse soll mA, ihre Richtung n sein. Nun kann man das Gewicht mg zerlegen in eine Componente nach n, die mg cos (ng) heissen soll, und in eine Componente, die zu n normal ist, also der Oberfläche der Flüssigkeit an dieser Stelle parallel geht, und welche mg sin (ng) ist. Die beiden ersten Kräfte mA und mg cos (ng) stehen normal auf der Oberfläche der Flüssigkeit, die letzte liegt in der Oberfläche; sollten für diese Flüssigkeit die Gesetze der Hydrostatik gelten, d. h. die Gesetze des Gleichgewichtes der Flüssigkeiten, in welchen vollkommen freie Beweglichkeit der Theilchen über einander vorausgesetzt wird, so könnte bei diesen Kräften an der Oberfläche die Flüssigkeit nicht im Gleichgewichte sein, weil die Resultirende dieser Kräfte nicht normal auf der Oberfläche steht. Mit dieser Behauptung fällt der Ausspruch von Poisson zusammen, dass nach der Laplace'schen Theorie eine gekrümmte Oberfläche bei Flüssigkeiten nicht stattfinden könne, und also diese Theorie die Capillarerscheinungen nicht erkläre.

Da aber die Erfahrung zeigt, dass die Flüssigkeiten im Gleichgewichte eine solche gekrümmte Oberfläche in der Nähe einer Wandfläche zeigen, so müssen wir daraus schliessen, dass in der Schichte zunächst der Oberfläche die in der Hydrostatik vorausgesetzte freie Beweglichkeit nach allen Richtungen nicht mehr stattfinde, dass vielmehr das oben betrachtete Theilchen m von der zunächst liegenden mit der Kraft mg sin (ng) nach der Tangente an die Oberfläche gehalten werde, und rückwärts einen gleich grossen Zug auf diese nächstliegenden Theile der Flüssigkeit ausübe. Die Theilchen an der Oberfläche der Flüssigkeit werden daher in der Richtung der Oberfläche gespannt sein, während hingegen ihre Unterlage nach der Normalen an die Oberfläche durch die Anziehung dieser, wie durch die eine Componente der Schwerkraft gedrückt werden, also in dieser Richtung eine Pressung erleiden. Wir wissen, dass tropfbare Flüssigkeiten zusammendrückbar sind, und dass sie einer solchen Zusammendrückung mit sehr grosser Kraft widerstehen. Ebenso muss man annehmen, dass die einzelnen Atome der Flüssigkeit in eine etwas grössere Entfernung gebracht werden können, als die im gewöhnlichen

Zustande ist, und dass sie sich dann mit sehr grosser Kraft zusammenziehen wollen, so lange sie nicht so weit auseinandergebracht sind, dass eine Anziehung nicht mehr stattfindet, dass sie auseinandergerissen sind, wie man bei einem festen Körper sagen würde. Die Flüssigkeiten zeigen für sehr kleine Aenderungen der Lage ihrer Atome analoge Erscheinungen wie feste Körper, die Gleichheit der Pressung rings um einen Punkt ist nicht unter allen Umständen und namentlich nicht an der Oberfläche der Flüssigkeiten vorhanden. Die horizontale Schichte in einem an einem Stabe hängenden Wassertropfen trägt die unter ihr liegenden Wassertheile; sie ist dadurch ausgedehnt, gespannt; ihre Spannung ist dem Gewichte der unter ihr liegenden Wassertheile gleich. Durch das Bestreben der Theile in dieser Schichte, in die gegenseitige Nähe zu kommen, welche dem nicht gespannten oder gepressten Wasser angehört, trägt sie das Wasser unter ihr und pflanzt den Zug dieses Wassers auf die über ihr liegende Schichte fort. Wir werden aber später sehen, dass in der That hierbei nur die Oberflächenschichte des Wassertropfens in Spannung ist, dass das Wasser in dieser Oberflächenschichte gleichsam wie in einer Haut liegt, welche durch das Gewicht des Wassers in ihr gespannt ist.

5. Das Volum einer tropfbaren Flüssigkeit ändert sich selbst bei einem sehr starken Druck auf die Oberfläche dieser Flüssigkeit nur äusserst wenig. Man wird daher selbst dort, wo die Pressung oder Spannung in einer Flüssigkeit schon sehr beträchtlich ist, bei der Berechnung der Masse der Flüssigkeit in jenem Volume die Dichte als unverändert durch diese Pressung oder Spannung annehmen können, ohne einen merklichen Fehler zu begehen. Wir werden in der Folge bei der Berechnung der Massen der Flüssigkeiten deren Dichte immer constant annehmen.

6. Betrachtet man ein kleines begränztes Volum im Innern einer ruhenden, schweren Flüssigkeit, so sind die Kräfte, welche auf die in diesem Volum enthaltene Masse wirken, die Schwere, die Attraction der umgebenden Flüssigkeit und endlich deren Pressungen auf die Oberfläche jenes Volums, diese Kräfte müssen an dem betrachteten Flüssigkeitsvolume im Gleichgewichte sein. Die Attraction der Flüssigkeit wirkt, abgesehen von der Gravitation, welche bei so kleinen Massen gegen die Attraction der Erde und die daher rührende Schwere verschwindend klein ist, nur auf unmessbar kleine Entfernungen. Beschreibt man daher um das als unendlich klein betrachtete Volum, mit einem Radius gleich der Entfernung, in welcher die Attraction unmerklich wird, eine Kugel, so wird, wenn diese ganz in die Masse der Flüssigkeit fällt, die Attraction auf die Massen in dem betrachteten Volume nach allen Seiten hin gleich gross werden, und sich daher gegenseitig aufheben. Diese Attraction ist daher für alle von der Oberfläche der Flüssigkeit in messbarer Entfernung liegenden Theile der Flüssigkeit gleich Null.

Das Gleichgewicht verlangt dann, dass auch die Pressungen rings um jenes unendlich kleine Volum, dessen Gewicht gegen diese Pressungen verschwindend klein ist, gleich gross sind, dass also im Innern der Flüssigkeit für alle Punkte, die in messbarer Entfernung von der Oberfläche liegen, die gewöhnlichen Gesetze der Hydrostatik gelten, deren Ausgang eben jene Gleichheit der Pressung rings um einen Punkt der Flüssigkeit ist.

Liegt aber das betrachtete Volum der Flüssigkeit so nahe an der Oberfläche, dass die Wirkungssphäre der Attraction, welche um das betrachtete Volum, wie oben beschrieben wird, zum Theil über diese Oberfläche der Flüssigkeit hinausragt, so ist die Attraction nach dieser Seite hin kleiner als nach der entgegengesetzten, und es bleibt also nach dem Innern der Flüssigkeit hin ein Ueberschuss von Attraction. Tritt die oben beschriebene Attractionssphäre über einen ebenen oder stetig gekrümmten Theil der Oberfläche hervor, so kann auch im letzten Falle der Theil der Oberfläche, welcher in dieser Kugel liegt, als eben behandelt werden, weil die Krümmungshalbmesser der Oberfläche messbar gross oder unendlich gross sind, während der Halbmesser der Attractionssphäre nur unmessbar klein ist.

Für's Gleichgewicht des betrachteten Volums wird es nothwendig sein, dass sich die Pressung auf die Oberfläche des Volums in der Richtung der Normalen zur Oberfläche der Flüssigkeit beim Durchgang durch das Volum um jenen Ueberschuss der Attraction ändert, während die Pressungen in der Richtung parallel zur Oberfläche der Flüssigkeiten wieder nur den Unterschied zeigen werden, welcher dem

Gewichte des betrachteten Flüssigkeitsvolums entspricht. Diese Pressungen parallel der Oberfläche der Flüssigkeit werden aber wesentlich andere sein können als die nach der Normalen.

Tritt die Sphäre der Attraction über einen Theil der Oberfläche, welcher eine scharfe Kante enthält, also z. B zum Theil über die freie Oberfläche, zum Theil über die an einer Wand des Gefässes anliegende Oberfläche, so wird die Richtung der Attraction in anderer Weise bestimmt werden müssen. Wir beschäftigen uns damit nicht, weil wir die Antwort auf diese Frage in dem Folgenden nicht nothwendig haben.

7. Nach diesen Vorbetrachtungen untersuchen wir das Gleichgewicht eines kleinen Flüssigkeitselementes, das an einer Wand oder der freien Oberfläche anliegt. Das Element begrenzen wir auf der Grenzfläche durch zwei durch den betrachteten Punkt gezogene Bogen $\varrho\, d\varphi$ und $\varrho_1\, d\theta$ der Hauptkrümmungskreise der Grenzfläche in diesem Punkte, deren Halbmesser ϱ und ϱ_1 sein sollen; ferner durch zwei zu jenen parallele Bogen. Durch die Normalen und diese Bogen legen wir Ebenen, und schneiden endlich das Element, das zwischen diesen vier Ebenen liegt, durch eine in der Tiefe n unter der Grenzfläche liegende parallele, d. h. überall von dieser gleich weit abstehende Fläche ab. Denkt man alle Seiten dieses Elementes unendlich klein, so ist sein Volum

$$\varrho \varrho_1\, n\, d\varphi\, d\theta,$$

und seine an einander stossenden Begrenzungsflächen stehen rechtwinklich unter einander.

Für n nehmen wir die Entfernung, in welcher von der Grenzfläche weg sowohl die Attraction der Flüssigkeit als die Anziehung der Wand unmerklich wird, also eine unmessbar kleine Grösse, aber strenge genommen keine unendlich kleine, wodurch die Rechnung den Charakter einer genäherten bekommt.

Die Attraction der Flüssigkeit auf dieses Element kann, wenn $\varDelta$ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet, durch

$$\varDelta\, A\, \varrho \varrho_1\, n\, d\varphi\, d\theta$$

vorgestellt werden, wo A eine von der Art der Flüssigkeit abhängige Constante ist. Die Richtung dieser Kraft ist die Richtung der Normalen zur Grenzfläche in die Flüssigkeit, was kurz die Richtung n heissen soll. Ihr direct entgegen wirkt die Attraction der Wand, welche ebenso durch

$$\varDelta\, B\, \varrho \varrho_1\, n\, d\varphi\, d\theta$$

vorgestellt werden kann, wo B eine von der Art der Wand und der Art der Flüssigkeit abhängige Constante ist.

In der Richtung von n ergibt sich hieraus die Kraft

$$\varDelta\, (A - B)\, \varrho \varrho_1\, n\, d\varphi\, d\theta.$$

Bezeichnet man mit ψ den Winkel, welchen n mit der Richtung der Schwere bildet, sind ebenso η und χ die Winkel der Bogen $\varrho\, d\varphi$ und $\varrho_1\, d\theta$ mit der Verticalen, so sind die Componenten des Gewichtes der Masse des betrachteten Elementes nach den drei Richtungen

$$\begin{array}{ccc} n\,, & \varrho\, d\varphi\,, & \varrho_1\, d\theta\,, \\ \varDelta g \cos\psi\, \varrho\varrho_1\, n\, d\varphi\, d\theta\,; & \varDelta g \cos\eta\, \varrho\varrho_1\, n\, d\varphi\, d\theta\,; & \varDelta g \cos\chi\, \varrho\varrho_1\, n\, d\varphi\, d\theta. \end{array}$$

Die Pressung in der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Wand, oder in der freien Oberfläche, wenn das betrachtete Element an dieser anliegt, sei P für die Flächeneinheit. Dann ist der daraus für das Element sich ergebende Druck in der Richtung n gleich

$$P\, \varrho \varrho_1\, d\varphi\, d\theta.$$

An der innern Begrenzungsfläche des betrachteten Elementes, welche der Wandfläche oder der freien Oberfläche parallel ist, sei die Pressung p, welche von P um eine endliche Grösse verschieden sein kann, weil n nicht unendlich klein ist. Diese Fläche hat die Grösse

$$(\varrho \pm n)\, (\varrho_1 \pm n)\, d\varphi\, d\theta,$$

wo die oberen Zeichen zu nehmen sind, wenn die Krümmungshalbmesser in die Flüssigkeit fallen, andernfalls die unteren. Lässt man hier das Glied mit n^2 weg, so erhält man den nach aussen, dem n entgegenstehenden Druck

$$p \varrho \varrho_1 \, d\varphi \, d\theta + p \, (\pm \varrho \pm \varrho_1) \, n \, d\varphi \, d\theta;$$

und es bleibt also von den Pressungen auf die zu n normalen Flächen der nach innen gehende Druck

$$(P-p) \, \varrho \varrho_1 \, d\varphi \, d\theta - p \, (\pm \varrho \pm \varrho_1) \, n \, d\varphi \, d\theta.$$

Nennt man S_1 die mittlere Pressung in der Fläche $\varrho n d\varphi$ auf die Flächeneinheit, so dass der Druck auf diese Begrenzungsfläche des betrachteten Elementes

$$S_1 \varrho \, n \, d\varphi$$

ist, mit der Richtung $\varrho_1 d\theta$; so ist der Druck auf die gleich grosse dieser gegenüberliegende Grenzfläche

$$\left(S_1 + \frac{dS_1}{d\theta} d\theta\right) \varrho \, n \, d\varphi$$

welcher mit $\varrho_1 d\theta$ den Winkel $\pi - d\theta$ bildet. Aus beiden Drücken ergibt sich der Druck auf das betrachtete Element in der Richtung von $\varrho_1 d\theta$ gleich

$$-\frac{dS_1}{d\theta} \varrho \, n \, d\varphi \, d\theta$$

und in der Richtung von n

$$\mp S_1 \varrho \, n \, d\varphi \, d\theta,$$

wo wieder das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem ϱ_1 in oder ausserhalb der Flüssigkeit liegt.

Nennt man ebenso S die mittlere Pressung in der Begrenzungsfläche $\varrho_1 n d\theta$ des betrachteten Elementes, so erhält man in gleicher Weise den Druck auf dieses Element in der Richtung des Bogenelementes $\varrho d\varphi$ gleich

$$-\frac{dS}{d\varphi} \varrho_1 \, n \, d\varphi \, d\theta,$$

und in der Richtung der Normalen n gleich

$$\mp S \varrho_1 \, n \, d\varphi \, d\theta.$$

Nachdem so die Componenten der Kräfte bestimmt sind, welche auf das betrachtete Flüssigkeitselement einwirken, ergeben sich die drei Bedingungen des Gleichgewichtes, indem man mit $\varrho \varrho_1 n \, d\varphi \, d\theta$ dividirt

$$\left.\begin{aligned} \varDelta(A-B) + \varDelta g \cos\psi + \frac{P-p}{n} - p\left(\pm\frac{1}{\varrho_1} \pm \frac{1}{\varrho}\right) \mp \frac{S_1}{\varrho_1} \mp \frac{S}{\varrho} &= 0 \\ \varDelta g \cos\eta - \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\varrho} &= 0 \\ \varDelta g \cos\chi - \frac{dS_1}{d\theta} \cdot \frac{1}{\varrho} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

8. Ist z die verticale Tiefe des betrachteten Elementes unter einer beliebigen Horizontalebene, so kann man

$$\varrho \, d\varphi \cos\eta = dz$$

setzen, und damit gibt die zweite der Gleichungen (1)

$$S = S_0 + \varDelta g \, (z - z_0), \qquad (2)$$

wo S_0 die Pressung in der Stelle der Oberfläche der Flüssigkeit ist, welche auf der betrachteten Krümmungslinie in der Tiefe z_0 unter der Horizontalebene liegt, von welcher die z gezählt werden.

Auf einer gegebenen Krümmungslinie ändert sich also die Pressung S nur mit der verticalen Höhe wegen der Schwere der Flüssigkeit; die Krümmung hat keinen Einfluss darauf.

Die dritte Gleichung gibt dasselbe für S_1. Wir haben oben gesehen, dass ein Theilchen der Oberflächenschichte nach allen Richtungen rechtwinklich zur Normalen n auf die Oberfläche gleich stark angezogen wird; es werden also beim stabilen Gleichgewichte auch die Pressungen in allen diesen Richtungen gleich gross sein müssen oder

$$S = S_1. \qquad (3)$$

9. Die erste der Gleichungen (1) bestimmt die Pressung der Flüssigkeit in der Entfernung n von der Oberfläche weg, wo die Attractionen nicht mehr merklich sind. Man hat

$$p = P + \varDelta\,(A-B)\,n + \varDelta g\,n\cos\psi - (S+p)\,n\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right),$$

oder wenn man, weil n unmessbar klein sein soll,

$$\varDelta g\,n \text{ und } p\,n \text{ gegen } p$$

weglässt,

$$p = P + \varDelta\,(A-B)\,n - S\,n\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right). \tag{4}$$

Hinsichtlich der doppelten Zeichen ist aus dem Obigen ersichtlich, dass das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn der betreffende Krümmungshalbmesser in die Flüssigkeit fällt, andernfalls das entgegengesetzte.

Ist man bis zur Entfernung n von der Oberfläche weg in das Innere der Flüssigkeit eingedrungen, so ändert sich von hier weg im Innern der Flüssigkeit die Pressung nur durch die Schwere nach den bekannten hydrostatischen Gesetzen. Für einen Punkt im Innern der Flüssigkeit, nicht in der Oberflächenschichte von der Dicke n, ist die Pressung p_1, wenn z_1 die Tiefe dieses Punktes unter der Ausgangsebene der z ist,

$$p_1 = p + \varDelta g\,(z_1 - z) = P + \varDelta\,(A-B)\,n - S\,n\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right) + \varDelta g\,(z_1 - z).$$

10. In der freien Oberfläche ist die äussere Pressung P constant; sind z und z′ die Coordinaten zweier Punkte dieser freien Oberfläche, S und S′ die Pressungen in den Richtungen der Tangentialebenen an diese Stellen; ϱ, ϱ_1 und ϱ', ϱ'_1 die Krümmungshalbmesser der freien Oberfläche in diesen beiden Punkten; so ergibt sich für die Pressung im Innern der Flüssigkeit in der Tiefe z_1, indem man einmal von dem einen Punkte der Oberfläche ausgeht, das anderemal von dem andern,

$$p_1 = P + \varDelta A n - S n\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right) + \varDelta g\,(z_1 - z) =$$
$$= P + \varDelta A n - S' n\left(\pm\frac{1}{\varrho_1}\pm\frac{1}{\varrho'_1}\right) + \varDelta g\,(z_1 - z'),$$

woraus

$$S n\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right) + \varDelta g\,(z - z') = S' n\left(\pm\frac{1}{\varrho'}\pm\frac{1}{\varrho'_1}\right)$$

folgt.

Gehört der Punkt in der Tiefe z′ einem ebenen und horizontalen Theile der freien Oberfläche an, welche in einem sehr weiten Gefässe vorkommt, und zählt man die Tiefen z immer von dieser Horizontalebene an, was im Folgenden immer geschehen soll, so erhält man

$$S n\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right) = -\varDelta g z. \tag{5}$$

Die gekrümmte Oberfläche steht also höher oder tiefer als die horizontale in dem weiten Gefässe, wenn S positiv ist, bei convexer oder concaver Oberfläche nach oben; umgekehrt ist es, wenn S negativ ist, also in der Oberflächenschichte eine Spannung und keine Pressung vorhanden ist. Die Erfahrung hat gelehrt, dass Flüssigkeiten mit concaver Oberfläche sich über den ebenen Theil der Oberfläche heben, und sich mit convexer Oberfläche senken; es ist also S negativ, die Oberflächenschichte gespannt, wie wir diess schon in Nro. 4 sahen.

11. Aus der Gleichung (5) sieht man zugleich, dass S n mit $\varDelta g z \varrho$ vergleichbar ist, dass also S gegen $\varDelta g z$ ausserordentlich gross ist, da ϱ ein messbarer Krümmungshalbmesser ist, n aber unmessbar klein; man kann daher $\varDelta g z$ gegen S vernachlässigen, oder statt der Gleichung (2) setzen

$$S = \text{Constant}. \tag{6}$$

Ich bezeichne für das Folgende den Werth von S n, welcher der freien Oberfläche angehört, durch

$$-\Delta g \frac{a^2}{2}$$

und behalte das Zeichen S n nur noch für die Pressung, welche der an der Wand anliegenden Flüssigkeitsschichte angehört, bei. Die Gleichung (5) wird mit dieser Bezeichnung

$$a^2 \left(\pm \frac{1}{\varrho} \pm \frac{1}{\varrho_1}\right) = 2z. \tag{7}$$

12. Das Verhältniss zwischen der Pressung S n in der Wandschichte und der Spannung in der Schichte an der freien Oberfläche ergibt sich aus der Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen für ein Volum der Flüssigkeit, das theilweise durch die Wand des Gefässes, theilweise durch die freie Oberfläche begrenzt ist. In einem Punkte M der freien Oberfläche, welcher der Wand sehr nahe, aber doch so weit von ihr entfernt liegt, dass dort die Anziehung der Wand unmerklich ist, ziehen wir die Normale $MN = n_0$ auf die freie Oberfläche in die Flüssigkeit so weit, dass in N die Attraction der Flüssigkeit nach allen Richtungen gleich gross ist. Dabei setzen wir voraus, es sei M so gewählt, dass auch in N die Anziehung der Wand noch unmerklich ist, oder dass die Normale N K auf die Wand, gleich $n + l$ grösser ist, als der Halbmesser der Attraction der Wand. Durch N ziehen wir in der Ebene MNK eine parallele zur Wand N G, welche wir so weit verlängern, dass in der zu NK gezogenen parallelen G F die Attraction der Flüssigkeit überall in die Richtung F G fällt, wobei vorausgesetzt ist, dass auch F G normal auf der Wand steht, was angenommen werden kann, da die Dimensionen alle nur unmessbar klein genommen werden können. Durch F G legen wir eine Ebene, welche auf FKMNG normal steht, durch N G eine zur Wand parallele, durch M N eine auf der freien Oberfläche normale Ebene, und schliessen endlich den durch diese Flächen, durch die freie Oberfläche und die Wandfläche begrenzten Raum durch eine zu FKMNG parallele Fläche ab. Für das Gleichgewicht der in diesem Raume befindlichen Flüssigkeit, dessen Dimensionen man nach allen Richtungen als unmessbar klein betrachten kann, ist nothwendig, dass die Summe aller mit der Wandfläche parallelen Componenten der Kräfte gleich Null ist. Diese Bedingung gibt die Gleichung

$$Sn + pl + \Delta g \frac{a^2}{2} \cos(n, n_0) = 0,$$

wobei n, n_0 der Winkel ist, welchen die gegen die Flüssigkeit gerichteten Normalen auf die Wandfläche und die freie Oberfläche mit einander bilden. In dieser Gleichung kommen die Attractionen der Flüssigkeit und die Schwere nicht in Betracht, da sie dem Volumen proportional, Kleine der dritten Ordnung sind, während die Drücke auf die Flächen Kleine der zweiten Ordnung. Da n und l Kleine derselben Ordnung sind, so ist auch p l gegen S n ausserordentlich klein, und obige Gleichung lässt sich daher schreiben:

$$Sn + \Delta g \frac{a^2}{2} \cos(n, n_0) = 0. \tag{8}$$

S n ist daher negativ, eine Spannung, wenn n, n_0 ein spitzer Winkel ist; ist dagegen n, n_0 ein stumpfer Winkel, so ist S n positiv, eine wirkliche Pressung. Das erste findet statt, wenn die freie Oberfläche an der betrachteten Stelle nach aussen convex ist, das letzte für eine concave Oberfläche.

Die Summe der Kräfte normal zur Wandfläche wird

$$\Delta g \frac{a^2}{2} \sin(n, n_0) - ph + Ps \cos(n, n_0) + Ph' = 0,$$

worin h die oben mit N G bezeichnete Länge ist, s der Bogen der freien Oberfläche von M bis zur Wand, h′ die mit N G parallele Länge der Wand, welche das oben betrachtete Volumen Flüssigkeit begrenzt; P aber die Pressung auf die freie Oberfläche, P′ die Pressung der Wandfläche gegen die Flüssigkeit. Da aber h, s und h′ unmessbar klein sind, so folgt aus dieser Bedingung, dass $\sin(n, n_0)$ auch unmessbar klein sein muss, dass also n, n_0 entweder 0 oder π sein muss, d. h. die freie Oberfläche muss die Wandfläche berühren.

Auf diesen Satz, welcher im Widerspruche mit den bisher gebräuchlichen Annahmen steht, wonach der Winkel n, n_0 zwar ein bestimmter, für dieselbe Flüssigkeit und dieselbe Wand constanter sein soll, der aber im Allgemeinen nicht 0 oder π ist, komme ich nachher zurück. Aus ihm folgt mit (8)

$$\mathrm{S\,n} = \mp \varDelta g \frac{a^2}{2}, \tag{9}$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem die freie Oberfläche an der Wandfläche convex oder concav nach aussen ist.

13. Man nennt Depressionsvolum das Volum, welches durch die freie Oberfläche der Flüssigkeit, eine verticale cylindrische Fläche durch die Begrenzungslinie dieser Oberfläche an der Wand und endlich durch die Ebene $z = 0$, das Hauptniveau begrenzt ist, und nimmt dieses Depressionsvolum positiv oder negativ, je nachdem es unter- oder oberhalb $z = 0$ liegt, d. h. je nachdem Depression oder Erhebung stattfindet.

Dieses Depressionsvolum lässt sich aus der Gestalt der freien Oberfläche der Flüssigkeit bestimmen. Bezeichnet man die Tiefe eines Punktes dieser freien Oberfläche unter dem oben angenommenen Niveau $z = 0$ mit z, so hat man als Gleichung der freien Oberfläche (7)

$$\frac{a^2}{2}\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right) = z;$$

ist $d\omega$ ein Element dieser freien Oberfläche und n die Richtung der Normalen zu diesem Elemente in die Flüssigkeit gezogen, so ist das Depressionsvolum

$$V = \int z\, d\omega \cos(n, z),$$

das Integral über die ganze freie Oberfläche der Flüssigkeit ausgedehnt. Setzt man für z den obigen Werth, so erhält man

$$V = \frac{a^2}{2}\int\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right)\cos(n, z)\, d\omega. \tag{10}$$

Für ein Gefäss, dessen Wände an der Begrenzungslinie zwischen freier Oberfläche der Flüssigkeit und Wandfläche zwei parallele verticale Ebenen bilden, ist die freie Oberfläche eine cylindrische mit horizontalen Mantellinien; für sie wird der eine Krümmungshalbmesser unendlich gross, und man kann setzen

$$\varrho\, d\,(n, z) = d\omega.$$

Damit wird das Depressionsvolum

$$V = \pm\frac{a^2}{2}\int \cos(n, z)\, d\,(n, z) = \pm\frac{a^2}{2}(\sin\beta - \sin\beta_1),$$

wo β und β_1 die Werthe von n, z an den beiden Grenzlinien sind. Es ist aber $\beta_1 = -\beta$, daher das Depressionsvolum

$$V = \pm a^2 \sin\beta. \tag{11}$$

Für ein Gefäss, welches die Flüssigkeit in einer Rotationsfläche mit verticaler Axe begrenzt, ist auch die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine Rotationsfläche mit derselben Axe. Setzt man für diese

$$\varrho_1 \sin(n, z) = x \text{ und } \varrho\, d\,(n, z)\, x\, d\varphi = d\omega,$$

so findet man für das Depressionsvolum

$$V = \pm\frac{a^2}{2}\iint x\cos(n, z)\, d\,(n, z)\, d\varphi \pm \frac{a^2}{2}\iint \frac{\varrho\, x}{\varrho_1}\cos(n, z)\, d\,(n, z)\, d\varphi$$

$$= \pm a^2 \pi r \sin\beta \mp a^2\pi \int \frac{dx}{d\,(n, z)} \sin(n, z)\, d\,(n, z)$$

$$\pm a^2\pi \int \varrho \sin(n, z)\cos(n, z)\, d\,(n, z),$$

was sich mit

$$dx = \varrho\, d\,(n, z) \cos (n, z)$$

auf das erste Glied reducirt. Daher

$$V = \pm\, a^2 .\, r\pi \sin \beta. \tag{12}$$

14. In der Gleichung (11) ist nach Nro. 12 $\beta = \frac{\pi}{2}$, und diese Gleichung wird

$$V = \pm\, a^2. \tag{13}$$

Die Bedeutung der Capillaritätsconstanten a^2 ergibt sich hiernach als das Depressionsvolum, welches sich auf die Länge eins zwischen zwei parallelen verticalen Platten herstellt. Dieses ist, wie man sieht, constant für dieselben Platten und dieselbe Flüssigkeit.

In der Gleichung (12) wird $\sin \beta$ für eine verticale cylindrische Röhre ebenfalls gleich 1. Daraus ergibt sich a^2 wieder als das Depressionsvolum, das von der Länge 2 der Grenzlinie $2\, r\pi$ niedergehalten wird. Ist die mittlere Höhe dieses Depressionsvolums, der mittlere Werth von z, gleich h, so dass

$$V = r^2 \pi h$$

ist, so wird

$$r^2 \pi h = \pm\, a^2 .\, r\pi \text{ oder}$$

$$h = \pm \frac{a^2}{r} \tag{14}$$

oder dem Halbmesser der Röhre umgekehrt proportional, ein bekannter Satz.

Ist der Halbmesser der Röhre gleich 1, so ist

$$h = \pm\, a^2.$$

Die beiden Sätze (13) und (14) werden gewöhnlich bei der Bestimmung der Capillaritätsconstanten a^2 gebraucht, wozu man die Gleichung (7) der freien Oberfläche meist mit Annäherung bestimmt. Diese Bestimmung der freien Oberfläche hat Poisson in seiner Théorie de l'action capillaire am weitesten verfolgt, worauf hier verwiesen wird.

15. Wir bestimmen noch die verticale Componente des Druckes der Flüssigkeit auf das Gefäss, welche dem Gewichte der in dem Gefässe enthaltenen Flüssigkeit gleich sein wird. Das ist aber nur der Fall, wenn die Flüssigkeit in ihrer freien Oberfläche die Wand berührt; ist diess nicht der Fall, was durch Auftreten fremder Kräfte eintreten kann, so gilt der obige Satz in seiner Allgemeinheit nicht mehr.

Auf die Gefässwand geschieht der oben mit P bezeichnete Druck der Normalen n entgegen; die Gefässwand wird von der Flüssigkeit mit der Kraft Δ B n auf die Flächeneinheit angezogen, diese Kraft liegt in der Richtung von n. Daraus ergibt sich für das Element $d\omega$ der Wandfläche in der Richtung von z die Kraft

$$-\,(P - \Delta B n)\, d\omega \cos (n, z).$$

Zählt man wie oben die z von der horizontalen Ebene, in welcher die freie Oberfläche entweder eben steht, oder wenn die Oberfläche gekrümmt ist, in einer mit dem Gefässe communicirenden hinreichend weiten Röhre eben stehen würde, so hat man für einen Punkt der Gefässwand, welcher in der Tiefe z steht, aus (4)

$$P = p - \Delta\, (A - B)\, n + S n \left(\pm \frac{1}{\varrho} \pm \frac{1}{\varrho_1}\right);$$

hierin ergibt sich p, wenn man von der freien ebenen Oberfläche ausgeht, aus (Nro. 10)

$$p = P_0 + \Delta A n + \Delta g z,$$

wo P_0 der Druck auf die Einheit der freien Oberfläche, etwa der Druck der Luft ist. Diess gibt

$$P - \Delta B n = P_0 + S n \left(\pm \frac{1}{\varrho} \pm \frac{1}{\varrho_1}\right) + \Delta g z$$

und also den verticalen Druck auf die Wand des Gefässes

$$(a)\qquad -P_0\int \cos(n,z)\,d\omega - Sn\int\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right)\cos(n,z)\,d\omega - \varDelta g\int z\cos(n,z)\,d\omega.$$

Dabei sind alle Integrale über die ganze Gefässwand, so weit diese mit der Flüssigkeit in Berührung steht, auszudehnen.

Bedenkt man, dass $d\omega \cos(n,z)$ die Horizontalprojection des Flächenelementes $d\omega$ ist, positiv oder negativ, je nachdem n, z ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist, so sieht man, dass das erste Glied gleich dem Drucke der Atmosphäre auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit ist. Diesem Drucke gegenüber steht der Druck der Atmosphäre auf die Aussenseite des Gefässes, und beide Drucke heben sich auf, oder genauer, es bleibt der Auftrieb der Luft, wenn man die Verschiedenheit von P_0 bedenkt.

Das letzte Glied gibt für alle Elemente $d\omega$, in welchen die Normale n mit z einen stumpfen Winkel bildet, das positive Gewicht der Flüssigkeitssäule, welche über diesem Elemente stehen würde, wenn die Flüssigkeitsoberfläche bei $z = 0$ wäre; für alle Elemente $d\omega$ der Wandfläche, in welchen n, z ein spitzer Winkel ist, erhält man dasselbe Gewicht, aber negativ. Daraus ergibt sich, dass das dritte Glied des obigen Ausdrucks das Gewicht der Flüssigkeit in dem Gefässe ist, mehr dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche durch die freie Oberfläche der Flüssigkeit, eine vertikale cylindrische Fläche durch die Begrenzungslinie dieser Oberfläche an der Wand und endlich durch die Ebene $z = 0$ begrenzt ist. Dabei ist dieses Gewicht positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem das beschriebene Volum, welches oben das Depressionsvolum genannt wurde, unter- oder oberhalb $z = 0$ liegt, d. h. je nachdem Depression oder Erhebung stattfindet.

Nennt man das Depressionsvolum V, so verlangt also der Satz, dass der vertikale Druck auf das Gefäss gleich dem Gewichte der in ihm enthaltenen Flüssigkeit ist, dass das zweite Glied des obigen Ausdrucks das Zuviel in dem dritten Gliede aufhebe, oder dass

$$-Sn\int\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right)\cos(n,z)\,d\omega + \varDelta g V = 0 \qquad (15)$$

sei.

Die Gleichung zeigt unmittelbar, dass jedes ebene Stück der Gefässwand, und jedes verticale keinen Einfluss auf das Depressionsvolum hat.

16. Für ein Gefäss, das ganz geschlossen und vollständig mit Flüssigkeit erfüllt ist, gibt das letzte Glied in dem Ausdrucke (a) der vorhergehenden Nummer oder

$$-\varDelta g\int z\cos(n,z)\,d\omega$$

das Gewicht der in dem Gefässe enthaltenen Flüssigkeit. Es muss also für ein solches Gefäss das zweite der Glieder des Ausdrucks (a) gleich Null werden, oder es ist

$$\int\left(\pm\frac{1}{\varrho}\pm\frac{1}{\varrho_1}\right)\cos(n,z)\,d\omega$$

über die Oberfläche einer allseitig geschlossenen Fläche ausgedehnt gleich Null.

Theilt man diese Oberfläche nach irgend einer auf ihr in sich zurück laufenden Linie in zwei Theile, so muss das obige Integral für den einen Theil dieser Oberfläche gleich und entgegengesetzt sein dem Integrale für den andern Theil. Da aber der eine dieser beiden Theile beliebig abgeändert werden kann, und das obige Integral doch immer dem Werthe des Integrals für den ungeänderten zweiten Theil gleich aber entgegengesetzt sein muss, so kann überhaupt der Werth dieses Integrals für einen dieser beiden Theile nur von dem abhängen, was bei jenen Abänderungen unverändert bleiben muss, das ist von der Grenzlinie beider Theile und von der Neigung der letzten Theile der Fläche an dieser Grenzlinie.

Wird diess in die Gleichung (10) übertragen, so sieht man, dass das Depressionsvolum nur abhängig sein kann, ausser von dem Werthe von Sn, von der Grenzlinie zwischen der freien Oberfläche der Flüssigkeit und der Wandfläche und von den Neigungen, welche die Wandfläche zunächst dieser Grenzlinie gegen die Verticale hat.

Poisson hat das obige Integral allgemein analytisch entwickelt; hier will ich diess nur für zwei einfachere Fälle thun, welche alles umschliessen, was in den Anwendungen gewöhnlich vorkommt.

Es sei zuerst die Gefässwand eine cylindrische Fläche von beliebiger Krümmung mit horizontalen Mantellinien, und in horizontaler Richtung unbegrenzt. Hier ist der eine der Krümmungshalbmesser unendlich gross, und man kann setzen

$$\pm \varrho \, d\,(n, z) = d\omega,$$

wobei die Länge des Elementes in der Richtung der Mantellinien gleich eins gedacht ist. Damit wird

$$\Delta g V = S n \int \cos(n, z) \, d\,(n, z)$$

$$= S n \, (\sin \alpha_1 - \sin \alpha) \tag{16}$$

wo α_1 und α die Werthe von n, z für die beiden Elemente der Wandfläche sind, in welchen die Flüssigkeit die Wand verlässt. Sind diese beiden Elemente einander parallel, so ist

$$\alpha_1 = \pi + \alpha$$

und daher

$$\Delta g V = -2 S n \sin \alpha. \tag{17}$$

Sind die beiden Austrittselemente vertical, so ist

$$\Delta g V = -2 S n. \tag{18}$$

Als zweiten Fall betrachten wir ein Gefäss, das durch eine Rotationsfläche mit verticaler Axe begrenzt ist. Sind x und z die horizontale und verticale Coordinate eines Punktes der Meridiancurve, ist ϱ der Krümmungshalbmesser der Meridiancurve an dieser Stelle, so ist

$$-\varrho_1 \sin(n, z) = x,$$

wenn der Winkel n, z vom positiven z nach der Seite des positiven x gerechnet wird.

Setzt man nun

$$d\omega = \pm \varrho \, d\,(n, z) \, . \, x \, d\varphi,$$

so wird, weil hier ϱ_1 immer in die Flüssigkeit fällt,

$$\int \left(\pm \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right) \cos(n, z) \, d\omega = \iint x \cos(n, z) \, d\,(n, z) \, d\varphi \pm \iint \frac{\varrho x}{\varrho_1} \cos(n, z) \, d\,(n, z) \, d\varphi.$$

Die Integration nach φ geht von 0 bis 2π und führt sich ohne Weiteres aus. Integrirt man hierauf in dem ersten Gliede rechts theilweise, so erhält man

$$\int \left(\pm \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right) \cos(n,z) \, d\omega = 2\pi r \sin \alpha - 2\pi \int \frac{dx}{d\,(n,z)} \sin(n,z) \, d\,(n,z) \pm 2\pi \int \frac{\varrho x}{\varrho_1} \cos(n,z) \, d\,(n,z).$$

Man hat aber

$$-dx = \pm \varrho \cos(n,z) \, d\,(n,z),$$

womit sich, wenn man in dem letzten Gliede für x wieder $-\varrho_1 \sin(n,z)$ substituirt, die beiden letzten Glieder aufheben.

An der Grenzlinie zwischen der freien Oberfläche der Flüssigkeit und der Wandfläche ist der Werth von n, z der oben gebrauchte α und r ist der Halbmesser dieser Grenzlinie, welche, weil alles symmetrisch um die Axe z ist, eine horizontale Kreislinie ist. Damit wird

$$\Delta g V = -S n \, . \, 2\pi r \sin \alpha. \tag{19}$$

Man sieht an den Ausdrücken (19) und (16) bewahrheitet, was oben ausgesprochen wurde, dass das Depressionsvolum nur von der Grenzlinie zwischen freier Oberfläche und Wandfläche und von der Neigung der Wandfläche an dieser Grenzlinie abhängt.

17. Vergleicht man diese Werthe des Depressionsvolums mit den in (Nro. 13) für gleiche Umstände gefundenen, so ergibt sich aus (11) und (18)

$$-\frac{2\,S\,n}{\varDelta g} = \pm\, a^2 \sin\beta \tag{20}$$

und aus (12) und (19)

$$-\frac{2\,S\,n}{\varDelta g} \sin\alpha = \pm\, a^2 \sin\beta. \tag{21}$$

Die Gleichung (8) dagegen gibt für den ersten Fall, bei welchem je nachdem die freie Oberfläche der Flüssigkeit convex oder concav nach oben ist,

$$n, n_0 = \frac{\pi}{2} \mp \beta$$

ist,

$$S\,n \pm \varDelta g\, \frac{a^2}{2} \sin\beta = 0,$$

was mit (20) übereinstimmt.

Für den zweiten der betrachteten Fälle ist

$$(n, n_0) = \beta \mp \alpha,$$

und damit gibt die Gleichung (8)

$$\frac{2\,S\,n}{\varDelta g} = -\, a^2 \cos(\beta \mp \alpha),$$

was mit (21) verglichen gibt

$$\cos(\beta \mp \alpha) = \pm\, \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \text{ oder}$$

$$\cos\beta \cos\alpha \pm \sin\beta \sin\alpha = \pm\, \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$\sin\alpha \cos\alpha = \pm \tan\beta\,(1 - \sin\alpha^2) \text{ oder}$$

$$\tan\alpha = \pm \tan\beta.$$

Das obere Zeichen gibt $\alpha = \beta$, oder die Normale auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit und die Normale auf die Wandfläche fallen in der Begrenzungslinie zusammen, die convexe Oberfläche der Flüssigkeit berührt die Wand. Das untere Zeichen gibt

$$\alpha = \pi - \beta,$$

die beiden Normalen fallen nach entgegengesetzten Richtungen, oder die concave Oberfläche der Flüssigkeit berührt die Wand ebenfalls. Das wurde schon in (Nro. 12) am Ende auf anderem Wege gefunden, und führte dort zu der Gleichung (9)

$$S\,n = \mp \varDelta g \,.\, \frac{a^2}{2}.$$

Ist aber $\alpha = 90^0$, so kann auch aus diesem zweiten Falle nichts über den Werth von n, n_0 geschlossen werden.

18. Wir beschäftigen uns noch mit dem in (Nro. 12) aufgestellten Satze, welcher sagt: die freie Oberfläche der Flüssigkeit berührt die Wandfläche.

Die allgemein angenommene Lehre ist die, dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit mit der Wandfläche einen bestimmten für dieselbe Flüssigkeit und dieselbe Wand constanten Winkel bilde. Diesen Satz hat, wie es scheint, Thomas Young zuerst aufgestellt. Er sagt in seinem Essay on the Cohesion of Fluids (Philosophical Transactions for the year 1805, pag. 66): „But it is necessary to „premise one observation, which appears to be new, and which is equally consistent with theory and „with experiment: there is an appropriate angle of contact between the surfaces of the fluid, exposed to „the air, and to the solid. This angle, for glass and water, and in all cases where a solid is perfectly „wetted by a fluid, is evanescent: for glass and mercury, it is about 140°, in common temperatures, and „when the mercury is moderately clean."

In dem Abschnitte „VII. Cohesive Attraction of Solids and Fluids" pag. 82 wird der Satz abgeleitet, dass ein Gleichgewicht der Oberflächenkräfte stattfinde, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit mit der Oberfläche der Wand einen bestimmten Winkel bilde, dessen Sinus versus zu dem Durchmesser in demselben Verhältnisse steht, in welchem die gegenseitige Attraction der flüssigen und der festen Theile zu der Attraction der flüssigen Theile unter sich.

Von der Ableitung dieses Satzes sagt Young (pag. 85): „Althoug the whole of this reasoning on „the attraction of solids is to be considered rather as an approximation than as a strict demonstration, „yet we are amply justified in concluding, that all the phenomema of capillary action may be accurately „explained and mathematically demonstrated from the general law of the equable tension of the surface „of a fluid, together with the consideration of the angle of the contact appropriate to every combination of a fluid with a solid.“

Da diese Ableitung von Young selbst nicht für eine stricte Demonstration ausgegeben wird, so will ich darüber nur das bemerken, dass Young Kräfte betrachtete, für welche man die Gleichgewichtsbedingung (8)

$$\mathrm{S\,n} + \varDelta g \frac{a^2}{2} \cos(n, n_0) = 0$$

aufstellen kann. Dann aber setzt er die Pressung S n zusammen aus der Anziehung der Wand oberhalb der Flüssigkeit auf diese, und der Spannung der an der Wand anliegenden Flüssigkeit, und von der letzten setzt er voraus, sie sei gleich der Anziehung der Flüssigkeit auf sich selbst weniger der Anziehung der Theile der Flüssigkeit und der Wandtheile. Die Ableitung dieses Satzes wird aber Niemand als eine überzeugende ansehen.

In dem Course of lectures on natural philosophy von Young kommt nichts Bestimmteres über den Randwinkel vor.

19. Poisson gibt zur Bestimmung dieses Randwinkels in seiner Nouvelle théorie de l'action capillaire, Paris 1831 (pag. 93) die Formel

$$q - \tilde{\omega} = (q + q_1) \cos \omega$$

worin ω der Winkel ist, welcher bei mir in Nro. 12 mit n, n_0 bezeichnet ist. Dabei ist q eine Constante, welche nur von der Art der Flüssigkeit und ihrer Dichte abhängt; q_1 hängt ebenso nur von der Art der Flüssigkeit und ihrer Dichte in der Schichte an ihrer freien Oberfläche ab; $\tilde{\omega}$ endlich ist eine Constante, welche von der Dichte der Flüssigkeit in der an der Wand anliegenden Schichte abhängt, und desshalb von der Art der Wand. Ein Weiteres über diese Constanten lernt man aber aus den Integralformeln von Poisson mit unbekannten Functionen nicht kennen. Diese Formel ist nichts anderes als die Formel (8) in Nro. 12 in einer andern, aber nicht verständlicheren Form. Die weiteren Folgerungen, welche ich in Nro. 12 machte, und welche zu dem Satze $n, n_0 = 0$ oder $= \pi$ führten, hat Poisson nicht angestellt, ebenso wenig die zu dem gleichen Satze führenden Betrachtungen in Nro. 13 bis 17.

20. Eine theoretische Bestimmung des Randwinkels haben wir noch von Gauss in der Abhandlung „Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii“. Commentationes societatis regiae scientiarum Göttingensis recensiores. Vol. VII. ad a. 1828—1832.

Der Winkel, welcher bei mir mit n, n_0 bezeichnet ist, heisst bei Gauss i, und für diesen Winkel gibt Gauss den Werth (pag. 80)

$$\cos i = \frac{\alpha\alpha - 2\beta\beta}{\alpha\alpha} \text{ oder } \sin \frac{1}{2} i = \frac{\beta}{\alpha};$$

für die Gleichung der freien Oberfläche gibt Gauss

$$z = -\alpha\alpha \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

wo R und R′ die Krümmungshalbmesser der Oberfläche sind, an der Stelle, welche in der Höhe z über der Hauptniveauebene liegt, in welcher in einem communicirenden weiten Gefässe die ebene Oberfläche sich findet, diese Krümmungshalbmesser positiv oder negativ genommen, je nachdem sie ausserhalb oder innerhalb der Flüssigkeit liegen.

Berechnet man mit dieser Formel, welche, wie man sieht, mit der Formel (7) übereinstimmt, wenn man $\frac{a^2}{2}$ für $\alpha\alpha$ setzt, das Depressionsvolum für eine cylindrische verticale Röhre, so erhält man (17)

$$V = 2\alpha\alpha r\pi \sin\beta,$$

wo β der Winkel ist, welchen die Normale auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit am Rande mit der Verticalen abwärts bildet, diesen Winkel von der Verticalen bis zur Normalen in die Flüssigkeit durch diese gemessen.

Diess gibt für die convexe und für die concave freie Oberfläche der Flüssigkeit

$$i = 90^0 - \beta \text{ und } \sin\beta = \cos i.$$

Für dieses Depressionsvolum leitet Gauss aus seiner Theorie die Formel für verticale Röhren

$$a h = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\, b$$

ab (pag. 67), wobei a h das obige V mit entgegengesetztem Zeichen ist, indem bei Gauss das Erhebungsvolum positiv, das Depressionsvolum dagegen negativ genommen ist. Durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe von V erhält man eine identische Gleichung, woraus nichts weiter geschlossen werden kann. Ganz ebenso habe ich (in Nro. 16) bei der Betrachtung einer verticalen Röhre keine Bestimmung über den Randwinkel erhalten. Aber die in dem Werthe von cos i vorkommenden Grössen $\alpha\alpha$ und β sind auch hier durch Integrationen mit unbekannten Functionen erhalten, von welchen man, so lange diese Functionen nicht bekannt sind, nicht wissen kann, ob sie zulässig sind oder nicht. Damit geht aus der Gleichung

$$\cos i = \frac{\alpha\alpha - 2\beta\beta}{\alpha\alpha}$$

nicht mehr hervor, als aus der Gleichung (8) in Nro. 12.

21. Directe experimentelle Bestimmungen über den Randwinkel bei Glas und Quecksilber hat man neben einigen älteren besonders von G. Quincke (Poggendorff's Annalen 105. S. 1). Durch verschiedene Beobachtungsmethoden erhielt Quincke Werthe für den Randwinkel des reinen Quecksilbers und des reinen Glases, welche zwischen 27^0 und 57^0 liegen, und also keineswegs einen constanten Werth; auch änderte sich dieser Winkel bei demselben Versuche mit der Zeit. Quincke schliesst daraus, dass noch andere Kräfte vorhanden seien, welche diese Erscheinung modificiren und keinen Gleichgewichtszustand zu Stande kommen lassen. Mir scheint, dass neben einigen andern Ursachen, welche mitwirken können, es ganz besonders die Elektricität ist, welche durch Berührung von Quecksilber und Glas erregt wird, welche bekanntlich sehr bedeutend ist, und welche durch geringe Temperaturverschiedenheiten beider sich berührenden Körper sich bedeutend modificirt. Die in dem Glase erregte Elektricität verbreitet sich über die mit dem Quecksilber in Berührung stehende Wandfläche hinaus, und so entsteht von der freien Wandfläche her noch eine anziehende Kraft auf das Quecksilber, welche den Randwinkel von 0^0, was er ohne die Elektricität sein sollte, grösser macht, und um so grösser, je stärker die entwickelte Elektricität ist. Die Feuchtigkeit der Luft wird auf Verminderung des Randwinkels hinarbeiten; bei feuchter Platte wird der Randwinkel Null.

22. Berechnet man die Werthe der Constanten a aus den Versuchen von Quincke, indem man den Randwinkel gleich Null setzt, und die Einwirkung der Elektricität auf die Höhe der von Quincke gemessenen Tropfen als unbedeutend voraussetzt, so stimmen diese Werthe von a unter sich besser überein, als die mit dem Randwinkel berechneten. So bestimmt Quincke aus 4 Tropfendicken (S. 37 der angeführten Abhandlung) mit dem Randwinkel $44^0\,30'$ die Constante a im Mittel gleich 2,6369; aus einem Versuche mit einer benetzten Platte (S. 38) und dem Randwinkel 0 ergibt sich a = 2,469. Berechnet man aber a aus den ersten Versuchen unter der Voraussetzung der Randwinkel sei 0, die Constante a, so erhält man 2,4405, was mit dem an der benetzten Platte gefundenen Werthe bei Weitem besser stimmt, als der von Quincke berechnete Werth. Aehnliches ergibt sich auch aus den Messungen der Depression des Quecksilbers, wenn dieses in capillaren Röhren mit Wasser oder Weingeist überdeckt ist, welche Gay-Lussac anstellte, und welche Poisson (a. a. O. pag. 146) mittheilt.

Schul-Nachrichten.

Im Januar 1861 ist der Lehrer für katholische Religion, Pfarrer **Platz**, durch Vicar **Herzer** ersetzt worden.

Der Repetent und Assistent bei dem chemischen Unterricht Dr. **Hallwachs** ist mit dem Schluss des Schuljahrs $18^{59}/_{60}$ ausgetreten. Seine Stelle hat mit Beginn des neuen Schuljahrs Dr. **Ülsmann** übernommen. — Der zweite Assistent für Chemie, **Elwert**, hat zu Anfang Juli's eine Anstellung in einer chemischen Fabrik angetreten und den bisherigen Zögling der Anstalt **Melchior** zum Nachfolger erhalten. — Die Stelle eines Assistenten für Naturgeschichte ist zu Anfang des Schuljahrs an den frühern Schüler **Warth** übergegangen.

Als Schenkungen sind der polytechnischen Schule im abgelaufenen Schuljahr zu Theil geworden: 1) durch die Gnade **SEINER MAJESTÄT DES KÖNIGS** ein astronomischer Atlas; 2) vom K. W. Ministerium des Innern: „Bildliche Darstellung der Materialverwendungen bei Unterhaltung der Staatsstrassen des Königreichs Württemberg im Jahr 1860"; 3) von Herrn Finanzrath **Fischer** in Stuttgart aus dem Nachlasse seines verstorbenen Vaters, des Oberbauraths **v. Fischer**, welcher bis zum Jahr 1852 an der polytechnischen Schule als deren Vorstand segensreich gewirkt hatte: eine umfangreiche Sammlung werthvoller Zeichnungen und Bücher (zusammen 55 Nummern mit 471 einzelnen Gegenständen); 4) von Fräulein **Louise Kurtz** in Stuttgart aus dem Nachlasse ihres verstorbenen Bruders, des Goldwaarenfabrikanten **Kurtz**: zwei im besten Stande befindliche Probirwaagen nebst einer Sammlung von Apparaten zu chemischen Gold- und Silberproben; 5) vom Directorium der Königl. Bau-Akademie in Berlin: ein Exemplar einer autographirten Sammlung von Skizzen architektonischer und technischer Objecte, der Frucht einer akademischen Studienreise. — Die polytechnische Schule fühlt sich verpflichtet, ihrer Dankbarkeit für die empfangenen Beweise von Huld und Wohlwollen auch öffentlich Ausdruck zu geben.

Lehrer-Personal.

a) Hauptlehrer.

Professor Dr. **Bernhard Gugler**, Rector der Schule. (Descriptive und analytische Geometrie.)
Professor Dr. med. **Johann Gottlob v. Kurr**, Oberstudienrath. (Mineralogie und Geognosie, Zoologie, Botanik; Baumaterialienlehre.)
Professor Dr. **Hermann v. Fehling**. (Allgemeine und praktische Chemie; chemische Technologie.)
Professor **Christian Müller**. (Maschinenbau, Maschinenzeichnen.)
Professor **Gustav Adolf Hänel**. (Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Wasserbau.)
Professor Dr. **Carl Holtzmann**. (Physik und Mechanik.)
Professor **Carl Wilhelm Baur**. (Praktische Geometrie, Trigonometrie, Analysis.)
Professor **Carl Kurtz**. (Freihandzeichnen.)
Professor **Christian Heinrich Schmidt**. (Mechanische Technologie, populäre Mechanik; Feuerungskunde.)
Professor **Christian Leins**, Oberbaurath. (Bauentwürfe.)
Professor **Wilhelm Bäumer**. (Architekturzeichnen; Geschichte der Baukunst.)
Professor **Emil Denzel**. (Geschichte, Geographie, deutsche Sprache und Literatur.)
Professor **Alexander Tritschler**. (Bauconstruktionslehre, Hochbaukunde, Baukostenberechnung.)

b) Weitere Lehrer.

Professor **Heinrich Wilhelm Brutzer.** (Handelsfächer.)
Professor **Otto Hölder.** (Französische Sprache.)
Professor **Ludwig Gantter.** (Englische Sprache.)
Professor Dr. **Mährlen.** (Nationalökonomie.)
Philipp Runzler. (Italienische Sprache.)
Modelleur **Carl Plock.** (Modelliren.)
Professor **Paul Wirth.** (Ornamentenzeichnen.)
Obergeometer **Wall.** (Praktische Geometrie.)
Dr. **Paul Zech.** (Experimentalphysik.)
Dr. **Hermann Ülsmann.** (Analytische Chemie.)
Apotheker **Kübler.** (Pharmakognosie.)
Dr. **Müller,** Consistorialrath und Garnisonsprediger. (Evangelischer Religionsunterricht.)
Vicar **Herzer.** (Katholischer Religionsunterricht.)

c) Lehrer in den Werkstätten.

Mechaniker **Schweizer.** (Mechanische Werkstätte.)
Modellschreiner **Halmhuber.** (Holzmodellirwerkstätte.)

d) Repetenten und Assistenten.

Dr. **Paul Zech** (s. oben), für Physik und Mechanik.
Wilhelm Fischer, für praktische Geometrie und reine Mathematik.
Dr. **Moritz Baur,** für descriptive Geometrie und reine Mathematik.
Dr. Hermann Ülsmann (s. oben), für Chemie.
Albert Melchior, zweiter Assistent für Chemie.
Hugo Warth, für Naturgeschichte.
Jacob Wagner, Assistent für Maschinenconstruktion; zugleich technischer Zeichner.

Ausserdem sind an der Schule angestellt:

ein Cassier,
zwei Schuldiener,
ein Diener für das chemische Laboratorium.

Schüler.

In dem abgelaufenen Schuljahr ist die Anstalt von 270 Schülern (darunter 33 Ausländer) besucht worden.

Die Schüler vertheilen sich unter die verschiedenen Hauptberufsarten wie folgt:

a) Mechanische Technik (Architekten, Ingenieure, Mechaniker)	141
b) Chemische Technik (Berg- und Hüttenleute, Fabrikanten, Pharmazeuten)	51
c) Handelsfach	21
d) Lehrfach	19
e) Anderweitigen Berufs	33
f) Noch unbestimmten Berufs	5
	270

Schliesslich beehre ich mich, im Auftrag des Lehrercollegiums Gönner und Freunde unserer Anstalt zu der am 13. und 14. September stattfindenden Prüfung, mit welcher eine Ausstellung graphischer und plastischer Arbeiten verbunden sein wird, geziemend einzuladen.

Stuttgart, im September 1861.

Im Namen des Rectorats und sämmtlicher Lehrer:

Carl Holtzmann.